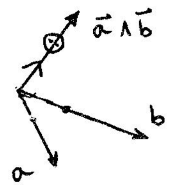
- ١٦ - الجداء الشعاعي (الخارجي) لشعاعين .

لشعاعين غير صفريين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ونرمز له ب $\vec{a} \wedge \vec{b}$ هو شعاع يتمتع بالصفات التالية :

ش - ١ $\vec{a} \wedge \vec{b}$ عمودى على كل من $\vec{a}$ و $\vec{b}$ (فهو اذن عمودى على المستوي الموازى للشعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$) .

ش - ٢ $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi, \quad 0 < \varphi = \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) < \pi$

ش - ٣ تشكل الاشعة : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b}$ (بهذا الترتيب) ثلاثية طردية (مباشرة) ، اى ان الراصد على $\vec{a} \wedge \vec{b}$ ، والمتجه مثله يرى $\vec{a}$ عن يمينه و $\vec{b}$ عن يساره (الشكل ١- ١٥) .

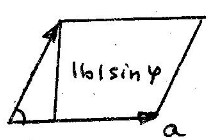


شكل (١- ١٥

نستنتج من ش -٢ ان طول شعاع الجداء الشعاعي يساوى مساحة متوازى الاضلاع المنشأ على الشعاعين (الشكل ١- ١٦)

واذا كان الشعاعان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متوازيين فاننا نعرف الجداء الشعاعي لهما بأنه يساوى الشعاع الصفر ، أى :

$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$ عندما يكون $\vec{a}$ او $\vec{b}$ شعاع الصفر .



شكل (١ - ١٦)

وللجداء الشعاعي الخواص التالية :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a}) \qquad (١)$$

وذلك لان للشعاعين $\vec{a} \wedge \vec{b}$ و $\vec{b} \wedge \vec{a}$ المنحى ذاته ، استنادا الى ش -١ والطول ذاته ، استنادا الى ش -٢ ، غير ان جهتيهما متعاكستان استنادا الى ش - ٣ .

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma$$

وفي حالة خاصة اذا كانت γ قائمة ، فاننا نرى :

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$$

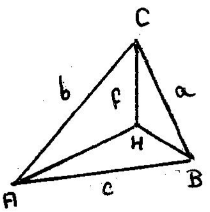
التي تعبر عن نظرية فيثاغورث الشهيرة .

(٢) سنثبت بالاستفادة من الجداء العددي ان ارتفاعات المثلث تتلاقى بنقطة واحدة . ليكن لدينا المثلث ABC ولتكن H نقطة تلاقي الارتفاعين النازلين من A و B ولنفرض $\overrightarrow{AH} = \vec{h}_A$ و $\overrightarrow{BH} = \vec{h}_B$ و $\overrightarrow{CH} = \vec{f}$. والمطلوب هو ان نثبت ان $\vec{f}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$.

لنلاحظ ان :

$$\vec{h}_A \cdot \vec{a} = 0 \,, \qquad \vec{h}_B \cdot \vec{a} = 0$$

(1-15,1)



شكل(١- ١٤)

وان :

$$\vec{c} = \vec{h}_A - \vec{h}_B \,, \quad \vec{a} = \vec{h}_B - \vec{f} \,, \quad \vec{b} = \vec{f} - \vec{h}_A$$

(1-15,2)

بتعويض (1-15,2) في (1-15,1) نجد:

$$\vec{h}_A \cdot \vec{h}_B = \vec{h}_A \cdot \vec{f} = \vec{h}_B \cdot \vec{f}$$

اذن :

$$(\vec{h}_A - \vec{h}_B) \cdot \vec{f} = 0$$

او :

$$\vec{c} \cdot \vec{f} = 0$$

وهذا يعني ان $\vec{f}$ عمودي على $\vec{c}$ وهو المطلوب .

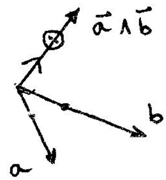
١٦ – الجداء الشعاعي (الخارجي) لشعاعين .

لشعاعين غير صفريين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ونرمز له ب $\vec{a} \wedge \vec{b}$ هو شعاع يتمتع بالصفات التالية :

ش – ١ $\vec{a} \wedge \vec{b}$ عمودي على كل من $\vec{a}$ و $\vec{b}$ (فهو اذن عمودي على المستوي الموازي للشعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$) .

ش – ٢ $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi, \quad 0 < \varphi = \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) < \pi$

ش – ٣ تشكل الاشعة : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b}$ (بهذا الترتيب) ثلاثية طردية (مباشرة) ، اي ان الراصد على $\vec{a} \wedge \vec{b}$ ، والمتجه مثله يرى $\vec{a}$ عن يمينه و $\vec{b}$ عن يساره (الشكل ١– ١٥) .

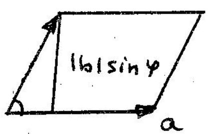


شكل (١– ١٥

نستنتج من ش –٢ ان طول شعاع الجداء الشعاعي يساوي مساحة متوازي الاضلاع المنشأ على الشعاعين (الشكل ١– ١٦)

واذا كان الشعاعان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متوازيين فاننا نعرف الجداء الشعاعي لهما بأنه يساوي الشعاع الصفر ، أي :

$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$ عندما يكون $\vec{a}$ او $\vec{b}$ شعاع الصفر .



شكل (١ – ١٦)

وللجداء الشعاعي الخواص التالية :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a}) \qquad (1)$$

وذلك لان للشعاعين $\vec{a} \wedge \vec{b}$ و $\vec{b} \wedge \vec{a}$ المنحى ذاته ، استنادا الى ش –١ والطول ذاته ، استنادا الى ش –٢ ، غير ان جهتيهما متعاكستان استنادا الى ش – ٣ .

$$\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0} \qquad (٢)$$

لانه استنادا الى (١) يكون :

$$\vec{a} \wedge \vec{a} = -(\vec{a} \wedge \vec{a})$$

$$2(\vec{a} \wedge \vec{a}) = \vec{0}$$

وبالتالـــي

$$\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$$

$$(\lambda \vec{a}) \wedge \vec{b} = \lambda(\vec{a} \wedge \vec{b}) \qquad (٣)$$

لان الشعاع $\lambda \vec{a} \wedge \vec{b}$ عمودى على كل من $\lambda \vec{a}$ و $\vec{b}$ فهو عمودى على كل من $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، فالشعاع $\lambda \vec{a} \wedge \vec{b}$ يوازى الشعاع $\vec{a} \wedge \vec{b}$ ، اذن ان الشعاعين في طرفي (٣) متفقان بالمنحى .

ثم ان :

$$|(\lambda \vec{a}) \wedge \vec{b}| = |\lambda \vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\lambda \vec{a}, \vec{b})$$
$$= \lambda |\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$
$$= \lambda |\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\lambda(\vec{a} \wedge \vec{b})|$$

اذا كانت λ موجبة ، وان :

$$|(\lambda \vec{a}) \wedge \vec{b}| = -\lambda |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\pi - \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$
$$= -\lambda |\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$
$$= |\lambda(\vec{a} \wedge \vec{b})|$$

ان كانت λ سالبة . اذن ان الشعاعين في طرفي (٣) متفقان بالطول

واخيرا اذا كانت λ موجبة فان جهة $\lambda \vec{a}$ لاتختلف عن جهة $\vec{a}$ وبالتالي فان جهة $(\lambda \vec{a}) \wedge \vec{b}$ لاتختلف عن جهة $\vec{a} \wedge \vec{b}$ وهي جهة $\lambda(\vec{a} \wedge \vec{b})$. اما اذا كانت λ سالبة فان جهة $\lambda \vec{a}$ معاكسة لجهة $\vec{a}$ ، وبالتالي فان جهة $\lambda \vec{a} \wedge \vec{b}$ معاكسة لجهة $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

وهكذا نرى ان الشعاعين في طرفي (٣) متفقان بالجهة .

$$\vec{a} \wedge (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \wedge \vec{b}) \qquad (٣)'$$

وتبرهن هذه الخاصة اعتمادا على الخاصة السابقة والخاصة (١)

$$(\lambda \vec{a}) \wedge (\mu \vec{b}) = \lambda\mu (\vec{a} \wedge \vec{b}) \qquad (٣)''$$

وذلك بتطبيق (٣) و (٣)' على التوالي

(٤) اذا كان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ شعاعين متوازيين (مرتبطين خطيا)، فانه يوجد عدد α بحيث يكون $\vec{a} = \alpha \vec{b}$. عندئذ يكون :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \alpha (\vec{b} \wedge \vec{b}) = \vec{0}$$

وبالعكس اذا كان $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$ و $\vec{a} \neq \vec{0}$ و $\vec{b} \neq \vec{0}$ فان $|\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b}) = 0$ اى ان $\sin \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b}) = 0$ فالزاوية بين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تساوى الصفر او تساوى π ، والشعاعان متوازيان ، اذن :

يلزم ويكفي لتوازى شعاعين غير صفريين هو ان يكون جداوءهما الشعاعي معدوما .

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \qquad (1-16, 1) \qquad (٥)$$

وذلك لانه استنادا الى تعريفي الجداء العددى والجداء الشعاعي يكون:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})$$
$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})$$

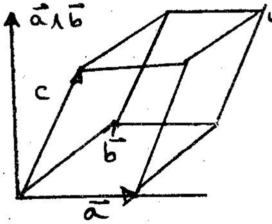
وبجمع هاتين العلاقتين نجد العلاقة المطلوبة .

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c} \qquad (٦)$$
(الخاصة التوزيعية)

سنثبت هذه الخاصة بعد البند القادم .

١-١٧- الجداء المختلط (الثلاثي العددي) يسمى الجداء العددي

للشعاعين $\vec{a}\wedge\vec{b}$ و $\vec{c}$ الجداء المختلط ، ويرمز لهذا الجداء ب $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ ، ولذلك فان



$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b})$$

للوصول الى المعنى الهندسي للجداء المختلط نحسب حجم متوازي السطوح المنشأ على الاشعة $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (الشكل ١- ١٧) . ان مساحة قاعدة متوازي السطوح هذا تقدر بطول الجداء الشعاعي $\vec{a}\wedge\vec{b}$ ، وان ارتفاعه يساوي $|\vec{c}|\cos\gamma$ وذلك بفرض ان $\gamma = \measuredangle(\vec{a}\wedge\vec{b},\vec{c})$. وعلى هذا فان الحجم V يساوي :

شكل (١- ١٧)

$$V = |\vec{a}\wedge\vec{b}||\vec{c}|\cos\gamma = (\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot\vec{c}$$

نستنتج من ذلك ان القيمة المطلقة للجداء المختلط لثلاثة اشعة تساوي حجم متوازي السطوح المنشأ على هذه الاشعة الثلاثة .

لنلاحظ ان الاشعة $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ، في الشكل (١- ١٧) تشكل ثلاثية طردية ، وبالتالي فان الزاوية التي يصنعها $\vec{a}\wedge\vec{b}$ مع $\vec{c}$ زاوية حادة ، الامر الذى ينتج عنه ان يقدر الجداء المختلط $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ في هذه الحالة بعدد موجب .

اما اذا شكلت $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ثلاثية عكسية (اذا وقعت $\vec{c}$ في الشكل ١- ١٧ ، مثلا ، تحت مستوى الشعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بدلا من فوقه) ، فعندئذ تكون الزاوية التي يصنعها $\vec{a}\wedge\vec{b}$ مع $\vec{c}$ زاوية منفرجة وبالتالي فان الجداء المختلط يقدر بعدد سالب .

وللجداء المختلط الخواص التالية :

(أ) نلاحظ ان الجداءات المختلطة المختلفة لثلاثة اشعة $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ لاتختلف عن بعضها بالاشارة (لان القيمة المطلقة لاى منها تقدر بحجم متوازى

السطوح نفسه) . واذا لاحظنا ان الثلاثيات $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ و $\vec{b},\vec{c},\vec{a}$ و $\vec{c},\vec{a},\vec{b}$ اما ان تكون طردية جميعها او عكسية جميعها وكذلك الامر بالنسبة للثلاثيات $\vec{b},\vec{a},\vec{c}$ و $\vec{a},\vec{c},\vec{b}$ و $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ في حين نرى ان $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ و $\vec{b},\vec{a},\vec{c}$ مختلفتان واحدة منها طردية والاخرى عكسية . لذلك :

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b})$$
$$= -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$$

نلخص هذه النتيجة الاخيرة بقولنا : اذا اجرينا على ترتيب الاشعة $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ في الجداء المختلط $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ تبديلا دوريا فان قيمة الجداء لاتتغير. اما اذا مابادلنا بين شعاعين وتركنا الثالث في مكانه (تبديل غير دوري) فان الجداء المختلط يغير اشارته .

(٢)
$$(\vec{a},\vec{a},\vec{b}) = 0$$

وذلك لاننا اذا بادلنا مابين الشعاعين الاول والثاني وتركنا الثالث في مكانه نجد:

$$(\vec{a},\vec{a},\vec{b}) = -(\vec{a},\vec{a},\vec{b})$$

وبالتالي :

$$2(\vec{a},\vec{a},\vec{b}) = 0$$

(٣)
$$(\alpha\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \alpha(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

لان :

$$(\alpha\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\alpha\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot\vec{c}$$
$$= \alpha(\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot\vec{c}$$
$$= \alpha(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

وبوجه عام :

$$(\alpha\vec{a},\beta\vec{b},\gamma\vec{c}) = \alpha\beta\gamma(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

(٤) الشرط اللازم والكافي كي تكون الاشعة $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ مرتبطة خطيا هو ان ينعدم الجداء المختلط $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

البرهان : اذا كان احد الاشعة $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ مساويا للصفر فانهـا تكون مرتبطة خطيا ويكون الجداء المختلط كذلك مساويا للصفر . امـا اذا كانت جميع الاشعة $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ مختلفة عن الصفر وكان $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ فان حجم متوازى السطوح المنشأ عليها يساوى الصفر ، الامر الذى ينشـأ عنه ان تقع الاشعة الثلاثة في مستو واحد فهي مرتبطة خطيا .

وبالعكس اذا كانت $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ مرتبطة خطيا فعندئذ توجد ثلاثة اعداد α, β, γ ليست معدومة بآن واحد بحيث يكون :

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0$$

لنضرب طرفي هذه العلاقة عدديا ب $\vec{b} \wedge \vec{c}$ و $\vec{c} \wedge \vec{a}$ و $\vec{a} \wedge \vec{b}$ على الترتيب فنحصل بالاعتماد على الخاصة التوزيعية للجداء العـددى والخاصة الثانية من الجداء المختلط على :

$$\alpha(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0, \quad \beta(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0, \quad \gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$$

ولما كانت α, β, γ ليست معدومة بآن واحد فان $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ وهو المطلـوب .

(٥) $$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1 + \vec{c}_2) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1) + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_2)$$ (الخاصة التوزيعية)

لان : $$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1 + \vec{c}_2) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c}_1 + \vec{c}_2)$$

وبالاستناد الى الخاصة التوزيعية للجداء العددى نجد:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1 + \vec{c}_2) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}_1 + (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}_2$$
$$= (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1) + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_2)$$

ونستطيع استنادا الى هذه الخاصة والخاصة الاولى للجداء المختلـط ان نعمم الخاصة التوزيعية فنكتب مثلا :

$$(\vec{a}_1+\vec{a}_2, \vec{b}_1+\vec{b}_2, \vec{c}_1+\vec{c}_2) = (\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1) + (\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_2)$$
$$+ (\vec{a}_1, \vec{b}_2, \vec{c}_1) + (\vec{a}_1, \vec{b}_2, \vec{c}_2)$$
$$+ (\vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{c}_1) + (\vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{c}_1)$$
$$+ (\vec{a}_2, \vec{b}_2, \vec{c}_1) + (\vec{a}_2, \vec{b}_2, \vec{c}_2)$$

وفي نهاية هذا البند نبرهن الخاصة التوزيعية للجداء الشعاعي والتي سبق ان اشرنا اليها في البند ١ـ ١٦ . ان هذه الخاصة هي :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$$

لنضع :

$$\vec{u} = \vec{a} \wedge (\vec{b}+\vec{c}) - \vec{a} \wedge \vec{b} - \vec{a} \wedge \vec{c}$$

ولنضرب الطرفين عدديا بشعاع كيفي $\vec{v}$ فنجد :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = [\vec{a} \wedge (\vec{b}+\vec{c})] \cdot \vec{v} - (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{v} - (\vec{a} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{v}$$
$$= (\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{v}) - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}) - (\vec{a}, \vec{c}, \vec{v})$$
$$= (\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}) + (\vec{a}, \vec{c}, \vec{v})$$
$$- (\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}) - (\vec{a}, \vec{c}, \vec{v}) = 0$$

وذلك بالاعتماد على الخاصة التوزيعية للجداء المختلط (والتي سبق برهانها دون الاعتماد على الخاصة التوزيعية للجداء الشعاعي ، او على أية قضية ترتبط بصحة الخاصة التوزيعية للجداء الشعاعي) .

وبما ان $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ فاما ان يكون $\vec{u}$ عموديا على $\vec{v}$ او ان يكون $\vec{v} = 0$ او $\vec{u} = 0$. ولكن بما ان $\vec{v}$ كيفي فمن الممكن ان نختاره غير معدوم وغير متعامد مع $\vec{u}$. اذن $\vec{u} = 0$ وهو المطلوب .

١ ـ ١٨ ـ الجداء الثلاثي الشعاعي . سنبرهن فيما يلي الدستور :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \qquad (1-18, 1)$$

علاقة البيسا

من الواضح ان هذا الدستور صحيح عندما يكون اى من الاشعة يساوى الصفر . كذلك اذا كان الشعاعان $\vec{b}$ و $\vec{c}$ متوازيين (اى $\vec{b} = \alpha \vec{c}$

فان الدستور صحيح كما ينشأ من التبديل المباشر . لذلك سنفرض فيما يلي ان جميع الاشعة $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ غير معدومة ، وان $\vec{b}$ و $\vec{c}$ غير متوازيين .

لنبدأ في برهان الدستور (1-18,1) في الحالة الخاصة $\vec{b} = \vec{a}$ أى في برهان الدستور :

$$\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{a} - \vec{a}^2 \vec{c} \qquad (1-18,2)$$

نلاحظ من اجل ذلك ان الشعاع $\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{c})$ عمودى على $\vec{a} \wedge \vec{c}$ فهو واقع في المستوى المعين ب $\vec{a}$ و $\vec{c}$ ، ولذلك يمكن تفريقه الى شعاعين احدهما محمول على حامل $\vec{a}$ ، والاخر على حامل $\vec{c}$ ، اى :

$$\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{c}) = \lambda \vec{a} + \mu \vec{c} \qquad (1-18,3)$$

لنضرب طرفي هذه العلاقة عدديا ب $\vec{a}$ فنجد :

$$0 = \lambda \vec{a}^2 + \mu (\vec{c} \cdot \vec{a}) \qquad (1-18,4)$$

واذا ضربنا طرفي (1-18,3) عدديا ب $\vec{c}$ نجد:

$$(\vec{a}, \vec{a} \wedge \vec{c}, \vec{c}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{c}) + \mu \vec{c}^2 \qquad (1-18,5)$$

لننظر الى (1-18,4) و (1-18,5) على انهما معادلتان في λ و μ : ان معين الامثال لهاتين المعادلتين هو $\vec{a}^2 \vec{c}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{c})^2$ وبالتالي استنادا الى (أ-16,1) فان هذا المعين يساوى $-(\vec{a} \wedge \vec{c})^2$ ولما كان $\vec{a}$ و $\vec{c}$ غير متوازيين فان المعين لايساوى الصفر ،وللمعادلتين حل وحيد هو :

$$\lambda = \vec{a} \cdot \vec{c} \quad , \quad \mu = -\vec{c}^2$$

والعلاقة (1-18,2) صحيحة .

كذلك نجد ان :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{a}) = -\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})$$
$$= \vec{a}^2 \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}$$

وللحصول على $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})$ نفرق $\vec{a}$ الى ثلاثة اشعة محمولة على $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{b}\wedge\vec{c}$ (التي لاتقع في مستو واحد) فيكون :.

$$\vec{a} = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c} + \nu(\vec{b}\wedge\vec{c})$$

وبالتالي فان :

$$\begin{aligned}
\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) &= (\lambda\vec{b} + \mu\vec{c} + \nu(\vec{b}\wedge\vec{c}))\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) \\
&= \lambda(\vec{b}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})) + \mu\,\vec{c}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) \\
&= \lambda(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{b} - \lambda\vec{b}^2\vec{c} + \mu\vec{c}^2\vec{b} - \mu(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{c} \\
&= \vec{b}[(\lambda\vec{b} + \mu\vec{c})\cdot\vec{c}] - \vec{c}[(\lambda\vec{b} + \mu\vec{c})\cdot\vec{b}] \\
&= \vec{b}[(\lambda\vec{b} + \mu\vec{c} + \nu(\vec{b}\wedge\vec{c}))\cdot\vec{c}] \\
&\quad - \vec{c}[(\lambda\vec{b} + \mu\vec{c} + \nu(\vec{b}\wedge\vec{c}))\cdot\vec{b}] \\
&= \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})
\end{aligned}$$

وهو المطلوب .